donde las *aes* son números reales y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, n es el **grado** de la función polinomial. En particular, $f(x) = ax + b$ es una función polinomial de primer grado, o **función lineal**, y $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función polinomial de segundo grado, o **función cuadrática**.

Los cocientes de funciones polinomiales se llaman funciones racionales. Así, f es una **función racional** si es de la forma

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

El dominio de una función racional consiste en aquellos números reales para los cuales el denominador es distinto de cero.

Una **función algebraica explícita** es aquella que puede obtenerse a partir de las funciones constantes y la función identidad por medio de las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces. Algunos ejemplos son

$$f(x) = 3x^{2/5} = 3\sqrt[5]{x^2} \qquad g(x) = \frac{(x + 2)\sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Las funciones listadas hasta el momento, junto con las funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponencial y logarítmicas (que se introducen más adelante) son la materia prima para cálculo.

Revisión de conceptos

1. Si $f(x) = x^2 + 1$, entonces $f^3(x) =$ _____.

2. El valor de la función compuesta $f \circ g$ en x está dada por $(f \circ g)(x) =$ _____.

3. Comparada con la gráfica de $y = f(x)$, la gráfica de $y = f(x + 2)$ está trasladada _______ unidades hacia _______.

4. Una función racional se define como _____.

Conjunto de problemas 0.6

1. Para $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2$, determine cada uno de los valores (si esto es posible).

(a) $(f + g)(2)$ (b) $(f \cdot g)(0)$ (c) $(g/f)(3)$
(d) $(f \circ g)(1)$ (e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ f)(-8)$

2. Para $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = 2/(x + 3)$, determine cada uno de los valores.

(a) $(f - g)(2)$ (b) $(f/g)(1)$ (c) $g^2(3)$
(d) $(f \circ g)(1)$ (e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ g)(3)$

3. Para $\Phi(u) = u^3 + 1$ y $\Psi(v) = 1/v$, determine cada uno de los valores.

(a) $(\Phi + \Psi)(t)$ (b) $(\Phi \circ \Psi)(r)$
(c) $(\Psi \circ \Phi)(r)$ (d) $\Phi^3(z)$
(e) $(\Phi - \Psi)(5t)$ (f) $((\Phi - \Psi) \circ \Psi)(t)$

4. Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = 2/x$, determine fórmulas para lo siguiente y también sus dominios.

(a) $(f \cdot g)(x)$ (b) $f^4(x) + g^4(x)$
(c) $(f \circ g)(x)$ (d) $(g \circ f)(x)$

5. Si $f(s) = \sqrt{s^2 - 4}$ y $g(w) = |1 + w|$, determine fórmulas para $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

6. Si $g(x) = x^2 + 1$, determine fórmulas para $g^3(x)$ y $(g \circ g \circ g)(x)$.

C **7.** Calcule $g(3.141)$, si $g(u) = \dfrac{\sqrt{u^3 + 2u}}{2 + u}$.

C **8.** Calcule $g(2.03)$ si $g(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^4}{1 - x + x^2}$.

C **9.** Calcule $[g^2(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$, si $g(v) = |11 - 7v|$.

C **10.** Calcule $[g^3(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$, si $g(x) = 6x - 11$.

11. Determine f y g de modo que $F = g \circ f$. (Véase el ejemplo 3).

(a) $F(x) = \sqrt{x + 7}$ (b) $F(x) = (x^2 + x)^{15}$

12. Encuentre f y g tales que $p = f \circ g$.

(a) $p(x) = \dfrac{2}{(x^2 + x + 1)^3}$ (b) $p(x) = \dfrac{1}{x^3 + 3x}$

13. Escriba $p(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ como una composición de tres funciones, hágalo de dos maneras distintas.

14. Escriba $p(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$ como una composición de cuatro funciones.

15. Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 2} - 3$, haciendo primero la gráfica de $g(x) = \sqrt{x}$ y luego trasladando ésta. (Véase el ejemplo 4).

16. Bosqueje la gráfica de $g(x) = |x + 3| - 4$; primero grafique $h(x) = |x|$ y luego trasládela.

17. Por medio de traslaciones, bosqueje la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2 - 4$.

18. Por medio de traslaciones, bosqueje la gráfica de $g(x) = (x + 1)^3 - 3$.

19. Bosqueje las gráficas de $f(x) = (x - 3)/2$ y $g(x) = \sqrt{x}$; utilice los mismos ejes coordenados. Luego trace $f + g$ al sumar las ordenadas y.

20. Siga las instrucciones del problema 19 para $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

21. Bosqueje la gráfica de $F(t) = \dfrac{|t| - t}{t}$.

22. Bosqueje la gráfica de $G(t) = t - [\![t]\!]$.

23. Establezca si cada una de las siguientes funciones es impar o par, o bien ninguna de las dos. Demuestre sus afirmaciones.

(a) La suma de dos funciones pares.

(b) La suma de dos funciones impares.

(c) El producto de dos funciones pares.

(d) El producto de dos funciones impares.

(e) El producto de una función par y una función impar.

24. Sea F cualquier función cuyo dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x. Demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

(a) $F(x) - F(-x)$ es una función impar.

(b) $F(x) + F(-x)$ es una función par.

(c) F puede expresarse siempre como la suma de una función impar y una función par.

25. ¿Todo polinomio de grado par es una función par? ¿Todo polinomio de grado impar es una función impar? Explique.

26. Clasifique cada una de las siguientes como FP (función polinomial), FR (función racional pero no función polinomial) o ninguna de éstas.

(a) $f(x) = 3x^{1/2} + 1$ (b) $f(x) = 3$

(c) $f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}$ (d) $f(x) = \pi x^3 - 3\pi$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 3}}$

27. La relación entre el precio por unidad P (en centavos) para cierto producto y la demanda D (en miles de unidades) parece satisfacer

$$P = \sqrt{29 - 3D + D^2}$$

Por otra parte, la demanda se ha incrementado, durante los t años, desde 1970 de acuerdo a $D = 2 + \sqrt{t}$.

(a) Exprese P como una función de t.

(b) Evalúe P cuando $t = 15$.

28. Después de estar en los negocios durante t años, un fabricante de automóviles está produciendo $120 + 2t + 3t^2$ unidades por año. Los precios de venta en dólares por unidad han aumentado de acuerdo con la fórmula $6000 + 700t$. Escriba una fórmula para los ingresos anuales del fabricante $R(t)$ después de t años.

29. Al comenzar el mediodía, el aeroplano A vuela con rumbo norte a una velocidad de 400 millas por hora. Exactamente 1 hora más tarde, el aeroplano B vuela con rumbo este a 300 millas por hora. Despreciando la curvatura de la Tierra y suponiendo que los aeroplanos vuelan a la misma altitud, determine una fórmula para $D(t)$, la distancia entre los dos aeroplanos t horas, contadas a partir del mediodía. *Sugerencia:* serán dos fórmulas para $D(t)$, una si $0 \le t < 1$ y la otra si $t \ge 1$.

≈ C **30.** Determine la distancia entre los aeroplanos del problema 29 a las 2:30 p. m.

31. Sea $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$. Demuestre que $f(f(x)) = x$, siempre y cuando $a^2 + bc \neq 0$ y $x \neq a/c$.

32. Sea $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 1}$. Demuestre que $f(f(f(x))) = x$, siempre y cuando $x \neq \pm 1$.

33. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$. Determine y simplifique cada valor.

(a) $f(1/x)$ (b) $f(f(x))$ (c) $f(1/f(x))$

34. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x} - 1}$. Encuentre y simplifique.

(a) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $f(f(x))$

35. Demuestre que la operación de composición de funciones es asociativa; es decir, $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$.

36. Sean $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = 1/(1 - x)$, $f_5(x) = (x - 1)/x$ y $f_6(x) = x/(x - 1)$. Observe que $f_3(f_4(x)) = f_3(1/(1 - x)) = 1 - 1/(1 - x) = x/(x - 1) = f_6(x)$; esto es, $f_3 \circ f_4 = f_6$. De hecho, la composición de cualesquiera dos de estas funciones es otra de la lista. Llene la tabla de composiciones de la figura 11.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3				f_6		
f_4						
f_5						
f_6						

Figura 11

Después utilice esta tabla para determinar cada una de las siguientes. Con base en el problema 35, sabe que se cumple la ley asociativa.

(a) $f_3 \circ f_3 \circ f_3 \circ f_3 \circ f_3$ (b) $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5 \circ f_6$

(c) F, si $F \circ f_6 = f_1$ (d) G, si $G \circ f_3 \circ f_6 = f_1$

(e) H si $f_2 \circ f_5 \circ H = f_5$

GC *En los problemas del 37 al 40, utilice una computadora o una calculadora graficadora.*

37. Sea $f(x) = x^2 - 3x$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(x - 0.5) - 0.6$ y $y = f(1.5x)$, todas sobre el dominio $[-2, 5]$.

38. Sea $f(x) = |x^3|$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(3x)$ y $y = f(3(x - 0.8))$, todas sobre el dominio $[-3, 3]$.

39. Sea $f(x) = 2\sqrt{x} - 2x + 0.25x^2$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(1.5x)$ y $y = f(x - 1) + 0.5$, todas en el dominio $[0, 5]$.

40. Sea $f(x) = 1/(x^2 + 1)$. Utilizando los mismos ejes, dibuje las gráficas de $y = f(x)$, $y = f(2x)$ y $y = f(x - 2) + 0.6$, todas en el dominio $[-4, 4]$.

CAS **41.** Su sistema de álgebra computacional (CAS) puede permitir el uso de parámetros en la definición de funciones. En cada caso, dibuje la gráfica de $y = f(x)$ para los valores especificados del parámetro k; utilice los mismos ejes y $-5 \le x \le 5$.

(a) $f(x) = |kx|^{0.7}$ para $k = 1, 2, 0.5$ y 0.2.

(b) $f(x) = |x - k|^{0.7}$ para $k = 0, 2, -0.5$ y -3.

(c) $f(x) = |x|^k$ para $k = 0.4, 0.7, 1$ y 1.7.

CAS **42.** Utilizando los mismos ejes, dibuje la gráfica de $f(x) = |k(x - c)|^n$ para la siguiente elección de parámetros.